امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات لطلاب السنة الثالثة رياضيات الفصل الاول للعام 2015 – 2016

**السؤال الأول : ( 30 درجة ) :**

ا- عرف ما يلي : الاحتمال الترموديناميكي – المؤثر الهرميتي – فضاء هلبرت – الاساسيل القانوني الكبير – خط الحقل – متجهة السطح – التسلاسب ( 14 درجة )

ب – برهن أن القيم الذاتية لمؤثر هرميتي هي قيم حقيقية دائما . ( 16 درجة )

**السؤال الثاني : ( 20 درجة ) :**

ليكن لدينا معادلة الاستمرار :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0$$

حيث v هي سرعة جريان السائل أو الغاز

برهن أن كثافة النقاط الطورية عند حجم معين في الفضاء الطوري أو عند الانتقال إلى منطقة أخرى من الفضاء تبقى ثابتة وغير متعلقة بالزمن .

**السؤال الثالث : ( 30 درجة ) :**

ا – برهن أن : $div\, rot\, \vec{A} = 0$ ( 10 درجات )

ب – أوجد العلاقة بين التدرج وسطوح تساوي الكمون ، ناقش ذلك عندما يكون اتجاه الحقل الكهربائي منطبقا أو عموديا على الانتقال . ( 20 درجة )

**السؤال الرابع : ( 20 درجة ) :**

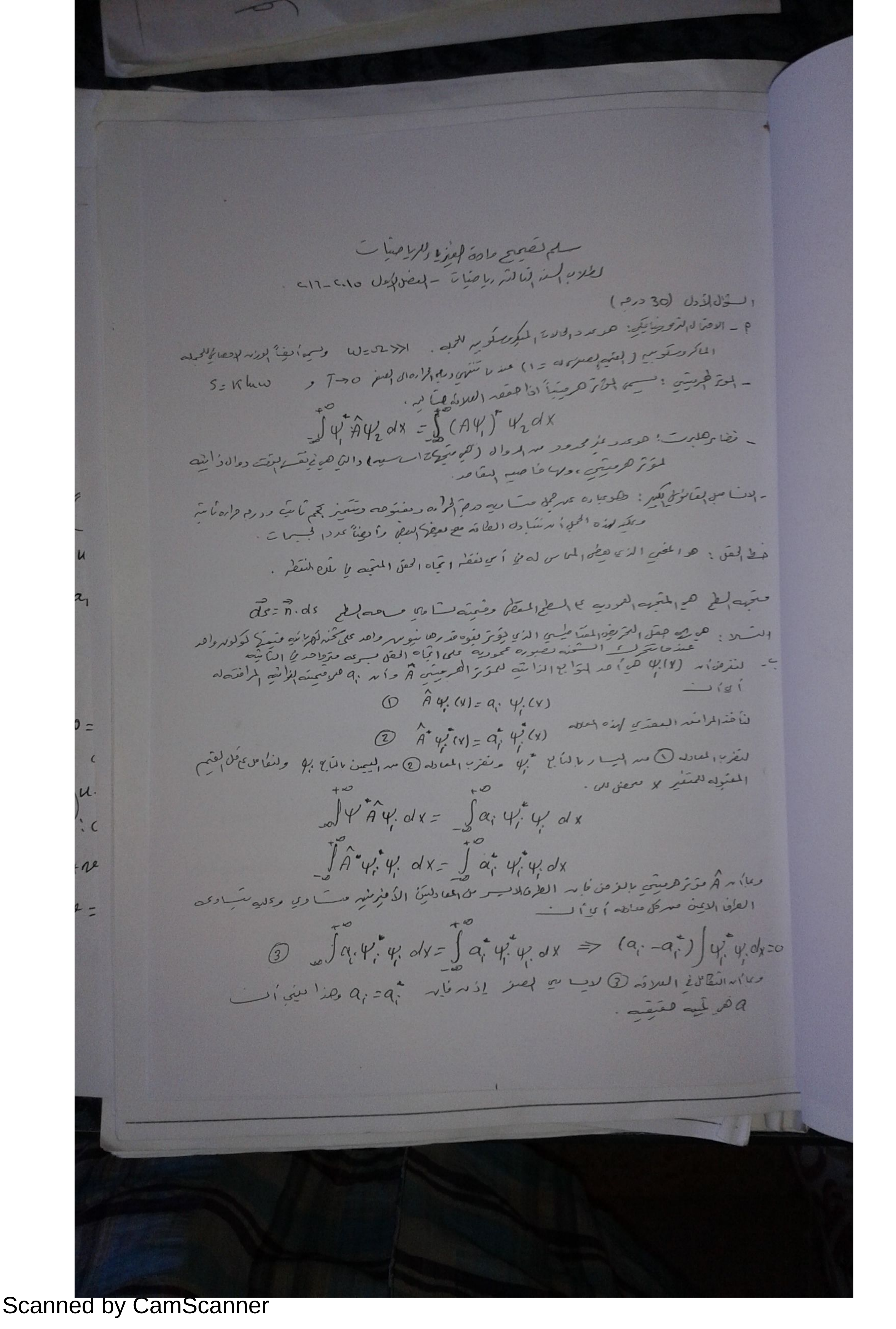
برهن أن القوة المغناطيسية F التي يؤثر بها حقل التحريض المغناطيسي على الشحنة الحرة q ذات السرعة v تعطى بالعلاقة التالية :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر:

د . فيصل مدهن



سلم تصحيح مادة الفيزياء الرياضيات
لطلاب السنة الثالثة رياضيات - الفصل الأول ٢٠١٥-٢٠١٦.

السؤال الأول (30 درجة)

أ - الاحتمال الترموديناميكي: هو عدد الحالات الميكروسكوبية المحققة للجملة. $W=\Omega>>1$ ويسمى أيضاً الوزن الإحصائي للجملة الماكروسكوبية

(العينية المعروفة = ١) عند ما تنتهي درجة الحرارة الى الصفر $T\to 0$ و $S=k\ln w$

- المؤثر الهرميتي: يسمى المؤثر هرميتياً اذا حقق العلاقة التالية.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^*\hat{A}\psi_2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(A\psi_1)^*\psi_2\,dx$$

- فضاء هلبرت: هو عدد غير محدود من الدوال (أو متجهات أساسية) والتي هي في نفس الوقت دوال ذاتية لمؤثر هرميتي، ولها خاصية التعامد.

- المجموعة القانونية الكبيرة: هو عبارة عن جملة متساوية درجة الحرارة ومفتوحة وتتميز بحجم ثابت ودرجة حرارة ثابتة ويمكن لهذه الجملة أن تتبادل الطاقة مع محيطها وأيضاً عدد الجسيمات.

خط الحقل: هو المنحني الذي يعطي المماس له في أي نقطة اتجاه الحقل المتجه في تلك النقطة.

متجه السطح: هو المتجه العمودي على السطح المعطى وقيمته تساوي مساحة السطح $\vec{ds}=\vec{n}.ds$

التسلا: هي شدة حقل التحريض المغناطيسي الذي يؤثر بقوة قدرها نيوتن واحد على شحنة كهربائية قيمتها كولون واحد عندما تتحرك الشحنة بصورة عمودية على اتجاه الحقل بسرعة متر واحد في الثانية.

ب- لنفرض أن $\psi_i(x)$ هي أحد التوابع الذاتية للمؤثر الهرميتي $\hat{A}$ وأن $a_i$ هي قيمته الذاتية الموافقة له أي أن:

$$① \quad \hat{A}\psi_i(x)=a_i\psi_i(x)$$

لنأخذ المرافق العقدي لهذه العلاقة

$$② \quad \hat{A}^*\psi_i^*(x)=a_i^*\psi_i^*(x)$$

لنضرب المعادلة ① من اليسار بالتابع $\psi_i^*$ ونضرب المعادلة ② من اليمين بالتابع $\psi_i$ ونكامل على كل القيم المقبولة للمتغير $x$ فنحصل على:

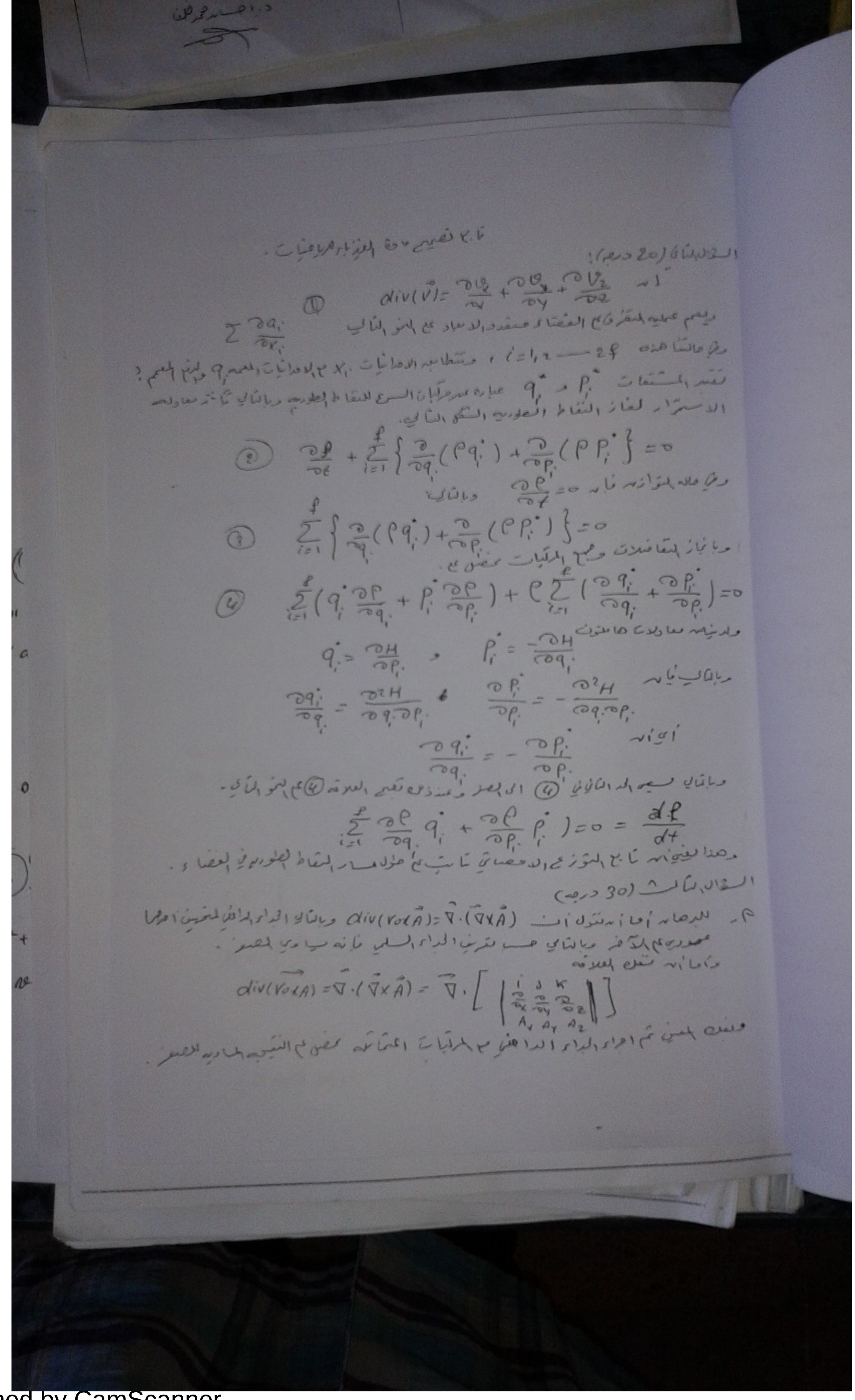
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{A}\psi_i\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}a_i\psi_i^*\psi_i\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{A}^*\psi_i^*\psi_i\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}a_i^*\psi_i^*\psi_i\,dx$$

وبما أن $\hat{A}$ مؤثر هرميتي بالزمن فإن الطرف الأيسر من المعادلتين الأخيرتين متساويين وكذلك يتساوى الطرف الأيمن من كل معادلة أي أن:

$$③ \quad \int_{-\infty}^{+\infty}a_i\psi_i^*\psi_i\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}a_i^*\psi_i^*\psi_i\,dx \Rightarrow (a_i-a_i^*)\int\psi_i^*\psi_i\,dx=0$$

وبما أن التكامل في العلاقة ③ لا يساوي الصفر إذن فإن $a_i=a_i^*$ وهذا يعني أن $a$ هي كمية حقيقية.



تابع تصحيح مادة الفيزياء الرياضية.

السؤال الثاني (20 درجة):

1- $$div(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1)$$

ويعمم عملية التفرق في الفضاء متعدد الابعاد على النحو التالي $\sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$

وفي حالتنا هذه $i = 1, 2, \ldots, 2f$ ، ونستبدل الاحداثيات $x_i$ بالاحداثيات المعممة $q_i$ وبالزخم المعمم $p_i$ ؛ تعتبر المشتقات $\dot{q}_i$ و $\dot{p}_i$ عبارة عن مركبات السرعة للنقاط الطورية وبالتالي تأخذ معادلة الاستمرار لغاز النقاط الطورية الشكل التالي.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right\} = 0 \quad (2)$$

وفي حالة التوازن فإن $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ وبالتالي

$$\sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right\} = 0 \quad (3)$$

وبإجراء التفاضلات وجمع المركبات نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{f} \left( \dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) + \rho \sum_{i=1}^{f} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (4)$$

ولدينا معادلات هاملتون

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \quad , \quad \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}$$

أي أن

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = -\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}$$

وبالتالي يسعى الحد الثاني في (4) الى الصفر وعند ذلك تعطى العلاقة (4) على النحو التالي.

$$\sum_{i=1}^{f} \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 = \frac{d\rho}{dt}$$

وهذا يعني أن تابع التوزيع الاحصائي ثابت على طول مسار النقاط الطورية في الفضاء.

السؤال الثالث (30 درجة)

م- للبرهان أولاً نتذكر أن $div(rot\,\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ وبالتالي الجداء المختلط لمتجهين اثنين منهما متساويين مع الآخر وبالتالي حسب تعريف الجداء المختلط فإنه يساوي الصفر.

ولإثبات ذلك نطبق العلاقة

$$div(\overrightarrow{rot A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \right]$$

نفك المحدد ثم اجراء الجداء الداخلي مع المركبات المماثلة نحصل على النتيجة المساوية للصفر.

يعطى فرق الكمون بين النقطتين (a) و(b) المعطى بالعلاقة

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

وبما أن العلاقة السابقة تتبع للموضع فقط ومستقلة عن المسار الذي يمكن أن نختاره.

$$V_b - V_a = \int_a^b dV$$

وبالتالي نجد:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} = -E\,dl\cos\theta = -E_l\,dl \quad (*)$$

حيث $E_l$ هو مسقط $E$ على المسار $l$ وهي المركبة المماسية ونعطى بالعلاقة $E_l = E\cos\theta$

وبتعويض هذه العلاقة في العلاقة (*) نحصل على

$$\frac{dV}{dl} = -E_l$$

وفي الثلاثية المتعامدة (x, y, z) تكون مركبات الحقل الكهربائي معطاة بالعلاقة:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ونميز الحالتين التاليتين:

١- عندما يكون اتجاه الحقل الكهربائي منطبقاً مع الانتقال ($d\vec{l}$) عندئذ يكون $\theta = 0$ ويصبح الجداء العددي سالباً

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} = -E\,dl$$

ونحصل على قيمة عظمى لـ $\frac{dV}{dl}$ لأن $\cos\theta = 1$. وبالتالي تكون قيمة الحقل $E = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{max}$

وهو المعدل الأعظمي لتغير الكمون بتدرج الكمون ونكتب بالشكل الآتي $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

٢- إذا كان الحقل $\vec{E}$ عمودياً على الانتقال $d\vec{l}$ عندئذ تكون الزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$ ونحصل على العلاقة:

$$(dV = 0) \Rightarrow V = const$$

وهي تمثل معادلة سطوح في الفراغ تسمى سطوح تساوي الكمون.

سؤال الرابع ٢٠ درجة.

إذا كانت ($dq$) شحنة كهربائية عنصرية تتحرك بسرعة ثابتة $\vec{v}$ في الخلاء ضمن حقل مغناطيسي $\vec{B}$ سوف تتأثر بالقوة المغناطيسية سواء كانت الشحنة موجبة أم سالبة وهذه القوة عمودية على كل من اتجاه الحقل المغناطيسي (التحريض) $\vec{B}$ ومع متجه سرعة الشحنة ونستنتج قيمتها بالعلاقة:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l}\times\vec{B})$$

$d\vec{l}$ هي المسافة التي تقطعها الشحنة ونستنتج خلال الفترة الزمنية $dt$ هي $dl = v\,dt$

ومنه نجد

$$d\vec{F} = I(\vec{v}\times\vec{B})\,dt$$

ولكن $dq = I\,dt$ وبالتعويض نجد:

$$d\vec{F} = dq(\vec{v}\times\vec{B})$$

وبالتالي فإن القوة المغناطيسية $\vec{F}$ التي تؤثر في حقل التحريض المغناطيسي على الشحنة النقطية q ذات سرعة v هي

$$\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B})$$

مدرس المقرر

د. [illegible]

[illegible]